

1.3 微分形式与外微分

1.3.1 微分

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们在学过偏导数之后学习了微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$. 在之前的小节中, 我们完成了流形上求偏导的推广, 接下来我们尝试着把微分也推广到流形上.

给定一个流形上的光滑函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, 用同之前一样自然的想法, 我们猜想是否可以将微分定义成

$$df|_{U_\alpha} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} (f \circ \phi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^k. \quad (1.42)$$

与之前相同, 我们需要验证这样的定义是否合理, 即定义是否与坐标卡的选取有关. 我们选定 $m \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为对 $1 \leq l \leq n$,

$$x_\beta^l = \phi_{\beta\alpha}^l(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n). \quad (1.43)$$

由欧氏空间中多元微积分的换元公式, 我们可以得到

$$(dx_\beta^1, \dots, dx_\beta^n) = (dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(x)) \right)_{(k,l)}. \quad (1.44)$$

由 (1.22) 与 (1.44), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} (f \circ \phi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^k &= (dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(m)) \\ &= (dx_\beta^1, \dots, dx_\beta^n) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x) \right)_{(k,l)}^{-1} \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x) \right)_{(k,l)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\beta^{-1})(\phi_\beta(\phi_\alpha(m))) \\ &= (dx_\beta^1, \dots, dx_\beta^n) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\beta^{-1})(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta^k} (f \circ \phi_\beta^{-1}) dx_\beta^k. \end{aligned} \quad (1.45)$$

我们惊奇的发现, 我们的定义与坐标卡的选取无关, 也就是说我们这样推广是合理的推广 (和切向量不一样!). 和之前一样, 我们所定义的全微分也是定义在一片一片坐标卡上的. 像对待向量场一样, 我们也要问: 拼起来的微分到底是什么东西呢? 微分可以看作什么样的大空间中的一个元素呢?

采用和切向量丛中相同的方法, 我们依然通过定义一个等价关系来构造这个空间. 我们现在看看我们需要的是一个什么样子的等价关系. 我们需要在商掉这个等价关系后, 可以将不同坐标卡之间的变换视作同一个东西. 所以我们先定义一个一般的 df , 查看它应该满足什么样的条件.

设 $df|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^n b_k^\alpha dx_\alpha^k$, 则

$$\begin{aligned} df|_{U_\alpha \cap U_\beta} &= (dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n) \begin{pmatrix} b_1^\alpha \\ \vdots \\ b_n^\alpha \end{pmatrix} \\ &= (dx_\beta^1, \dots, dx_\beta^n) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x) \right)_{(k,l)}^{-1} \begin{pmatrix} b_1^\alpha \\ \vdots \\ b_n^\alpha \end{pmatrix}. \quad (1.46) \\ df|_{U_\alpha \cap U_\beta} &= (dx_\beta^1, \dots, dx_\beta^n) \begin{pmatrix} b_1^\beta \\ \vdots \\ b_n^\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

为了保证上面两个式子相等, 我们得了系数向量应该满足的条件:

$$(b_1^\beta, \dots, b_n^\beta) = (b_1^\alpha, \dots, b_n^\alpha) \left(\left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(m) \right)_{(k,l)}^{-1} \right)^T. \quad (1.47)$$

定义 1.3.1. 我们定义 $\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ 的关系 " $\sim$ " 为

$$(x, (b_1^\alpha, \dots, b_n^\alpha)) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n \sim (y, (b_1^\beta, \dots, b_n^\beta)) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n \quad (1.48)$$

当且仅当 $x = y$ 且(1.47)成立. 我们可以验证 " $\sim$ " 是一个等价关系. 同时定义 $T^*M := \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) / \sim$, 称为 M 的余切丛.

设 $\pi' : T^*M \rightarrow M$, $(x, v) \mapsto x$ 为投影映射. 则由上述定义, π' 是合理定义的. 与 TM 同理我们可以证明 T^*M 也是光滑流形. 记

$$C^\infty(M, T^*M) = \{s : M \rightarrow T^*M \text{ 为光滑映射} | \pi' \circ s = \text{Id}_M\}. \quad (1.49)$$

所以我们可以得到 $df \in C^\infty(M, T^*M)$. 注意到对 $\forall s \in C^\infty(M, T^*M)$, 在任意坐标卡 U_α 上, 都存在 $b_1^\alpha, \dots, b_n^\alpha \in C^\infty(\phi_\alpha(U_\alpha))$, 使得

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^n b_k^\alpha dx_\alpha^k. \quad (1.50)$$

但是与上一节命题 1.2.4 不同的是, 此陈述反过来不一定成立, 即 $\forall s \in C^\infty(M, T^*M)$, 不一定存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得 $s = df$.

回忆一下微分的定义, 类似于向量场我们已经可以将其看成一个线性映射

$$d : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, T^*M) \quad (1.51)$$

我们能否更进一步, 对于 $s \in C^\infty(M, T^*M)$, 继续定义 s 的全微分呢? 对

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^n b_k^\alpha(x) dx_\alpha^k, \quad (1.52)$$

我们能否定义:

$$ds|_{U_\alpha} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l} b_k^\alpha(x) \right) dx_\alpha^l dx_\alpha^k? \quad (1.53)$$

这里有两个问题, 一个是 $dx_\alpha^l dx_\alpha^k$ 是什么? 另一个是我们的定义是否不依赖于坐标卡的选取? 我们在讨论曲面的基本形式时也遇到过这个问题, 现在我们较严格地讨论一下这件事情. 我们引入张量 (tensor) 的语言.

1.3.2 张量

上一节中, 出现过记号 $dx_i dx_j$, 从形式上看, 这是 dx_i 与 dx_j 的乘积, 但我们没有定义过此类乘积. 看样子笛卡尔积或许可以作为一个候选对象.

我们猜想上一节(1.53)中的 $dx_i dx_j$ 可能是笛卡尔积 $T_x^*M \times T_x^*M$ 中的元素. 但(1.53)中 ds 应该是关于 $dx_i dx_j$ 线性的 (因为有求和), 对于两个有

限维向量空间 V, W , 我们是否可以定义一个线性映射 $f: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$? 换句话说对 $\forall v_1 \neq v_2 \in V, \forall w_1 \neq w_2 \in W$, 是否有 $f(a(v_1, w_1)) = af((v_1, w_1))$, $a \in F$, $f((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) = f((v_1, w_1)) + f((v_2, w_2))$?

这里又有额外的两个问题: $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \in V \times W$? 如何定义数乘使得 $a(v_1, w_1) \in V \times W$? 如果满足这两个条件, $V \times W$ 本身就成为了一个向量空间。但一般来说, 虽然我们可以强行定义 $V \times W$ 上的线性结构 (比如把 $V \times W$ 等同于 $V \oplus W$), 但此时 f 并不是线性的。退而求其次的想法是重新构造一个和 $V \times W$ 相关的向量空间, 使得在这个新的向量空间上 f 是线性的。

下面我们在任意双线性 f 在扩张后线性的目标指引下将 $V \times W$ 扩张成一个向量空间. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ 分别是 V, W 的一组基, 其中 n, m 分别为 V 与 W 的维数. $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, (e_i, s_j) \in V \times W$, 我们定义由 $\{(e_i, s_j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 作为一组基生成的向量空间为 V 和 W 的张量积, 记为 $V \otimes W$. 作为 $V \otimes W$ 的元素, (e_i, s_j) 通常记为 $e_i \otimes s_j$, 而且满足对 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$(ae_i) \otimes s_j = e_i \otimes (as_j) = a(e_i \otimes s_j). \quad (1.54)$$

换句话说我们有

$$V \otimes W := \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^{ij} e_i \otimes s_j \mid a^{ij} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.55)$$

按照定义 $V \otimes W$ 显然是一个向量空间。

我们回忆一下前面提到的 **Einstein 求和约定**: 当指标 $i, j, k, l, \dots$, 上下各出现一次时表示对这个指标求和。例如上面的 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^{ij} e_i \otimes s_j$ 就可记为 $a^{ij} e_i \otimes s_j$ 。

到此我们已经定义了一个张量积, 这个定义是否合理? 他看起来依赖基的选取, 而我们希望两个空间 V, W 生成的另一个空间的定义能够脱离基的选择. 也就是说, 我们希望, 如果取 V 和 W 另外的两组基, (1.55) 定义出的向量空间 $V \otimes W$ 还是原来的空间. 事实上, 我们上面的定义满足这一性质。

取 V, W 的另一组基 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}, \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$, 则有线性表示:

$$e'_i = c_i^k e_k, \quad s'_j = b_j^l s_l, \quad (1.56)$$

此时

$$e'_i \otimes s'_j = c_i^k b_j^l e_k \otimes s_l \in V \otimes W, \quad (1.57)$$

这样一来, 对 $\forall a'^{ij} \in \mathbb{F}$, 有 $a'^{ij} e'_i \otimes s'_j = a'^{ij} c_i^k b_j^l e_k \otimes s_l \in V \otimes W$.

记 $V \otimes' W = \{a'^{ij} e'_i \otimes s'_j | a'^{ij} \in \mathbb{F}\}$, 则有 $V \otimes' W \subset V \otimes W$. 反过来, 用 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}, \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ 表示 e_i, s_j , 可得 $V \otimes W \subset V \otimes' W$. 从而有 $V \otimes W = V \otimes' W$, 这样我们已说明了式 (1.55) 对张量空间的定义不依赖于基的选择.

习题 1.3.2. 验证 $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$.

1.3.3 外代数与外微分

我们在前面一直试图求 $C^\infty(M, T^*M)$ 上的微分, 对 $\forall s \in C^\infty(M, T^*M)$, $s|_{U_\alpha} = b_k^\alpha dx_\alpha^k$, 我们先试着定义一种微分:

$$ds|_{U_\alpha} := \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l} b_k^\alpha \right) dx_\alpha^l \otimes dx_\alpha^k, \quad (1.58)$$

其中 $dx_\alpha^l \otimes dx_\alpha^k \in T_x^*M \otimes T_x^*M$. 这个定义满足我们需要的线性性质. 接下来我们要验证这个定义是否与坐标卡无关, 因为只有这样, 上述定义才是好的.

简记 $\Phi = \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k} \right)_{(k,l)}$ 为 Jacobi 矩阵, 记

$$\Phi_k^l = \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}. \quad (1.59)$$

则由(1.22),

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = \Phi_k^l \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}. \quad (1.60)$$

设 $\tilde{\Phi} := \Phi^{-1}$. 记 $\tilde{\Phi}_s^m$ 为矩阵 $\tilde{\Phi}$ 的 (s, m) 位置上的元素. 故

$$\tilde{\Phi}_l^m \Phi_k^l = \Phi_k^l \tilde{\Phi}_l^m = \delta_k^m. \quad (1.61)$$

对 (1.60) 两边同乘 $\tilde{\Phi}_s^k$, 并对 k 求和, 由 (1.61), 有

$$\tilde{\Phi}_s^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = \tilde{\Phi}_s^k \Phi_k^l \frac{\partial}{\partial x_\beta^l} = \delta_s^l \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}. \quad (1.62)$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^l} = \tilde{\Phi}_l^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}. \quad (1.63)$$

由(1.47),

$$b_k^\beta = \tilde{\Phi}_k^l b_l^\alpha. \quad (1.64)$$

由(1.44),

$$dx_\beta^l = \Phi_q^l dx_\alpha^q. \quad (1.65)$$

用上述记号与式 (1.58) 中 ds 的定义, 我们得到 ds 在另一个坐标卡 U_β 上的表示

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\beta^l} (b_k^\beta(x)) dx_\beta^l \otimes dx_\beta^k &= \tilde{\Phi}_l^m \frac{\partial(\tilde{\Phi}_k^t b_t^\alpha)}{\partial x_\alpha^m} \Phi_q^l \Phi_p^k dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\ &= \Phi_q^l \tilde{\Phi}_l^m \Phi_p^k \tilde{\Phi}_k^t \frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p + \Phi_q^l \tilde{\Phi}_l^m \Phi_p^k \frac{\partial \tilde{\Phi}_k^t}{\partial x_\alpha^m} b_t^\alpha dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\ &= \delta_q^m \delta_p^t \frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p + \delta_q^m \Phi_p^k \frac{\partial \tilde{\Phi}_k^t}{\partial x_\alpha^m} b_t^\alpha dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\ &= \frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^t - b_t^\alpha \tilde{\Phi}_k^t \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p, \end{aligned} \quad (1.66)$$

最后一个等号是因为

$$\Phi_p^k \frac{\partial \tilde{\Phi}_k^t}{\partial x_\alpha^m} = \frac{\partial(\Phi \Phi^{-1})_p^t}{\partial x_\alpha^m} - \frac{\partial \Phi_p^k}{\partial x_\alpha^m} \tilde{\Phi}_k^t = - \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} \tilde{\Phi}_k^t. \quad (1.67)$$

由于式 (1.66) 中最后一个等号后面的 $b_t^\alpha \Phi^{kt} \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p \neq 0$, (1.58) 式是与坐标卡选取有关的。

我们将 $\otimes$ 替换为其他算子, 使其为 0.

由于 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^m \partial x^p}$. 那么有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m} (dx_\alpha^p \otimes dx_\alpha^m - dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p) \\ = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m} dx_\alpha^p \otimes dx_\alpha^m - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^m \partial x^p} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

注意, 此式中的 p, m 为 Einstein 求和记号, 并无特殊含义, 我们将这种没有特别含义记号称作哑符号.

如果我们定义

$$ds|_{U_\alpha} := \frac{1}{2} \frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x_\alpha^l} (dx_\alpha^l \otimes dx_\alpha^k - dx_\alpha^k \otimes dx_\alpha^l), \quad (1.69)$$

式 (1.66) 中的 $b_t^\alpha \Phi^{kt} \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p$ 对应的一项便可以为 0, 此时 ds 的定义不依赖于坐标卡 U_α 的选取. 由上面的想法, 我们给出外积的定义.

定义 1.3.3 (外积). 若 $v, w \in V$ 我们定义 v 与 w 的外积为

$$v \wedge w := \frac{1}{2} (v \otimes w - w \otimes v). \quad (1.70)$$

所有外积张成的空间为

$$\Lambda^2 V := \{a_{ij} e_i \wedge e_j | a_{ij} \in \mathbb{R}\}. \quad (1.71)$$

其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 中的一组基. 显然 $\Lambda^2 V$ 的定义不依赖于基的选取.

现在我们用外积 $\wedge$ 替换式 (1.58) 中的 $\otimes$, 我们得到 ds 的整体定义

$$ds|_{U_\alpha} := \frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x_\alpha^l} dx_\alpha^l \wedge dx_\alpha^k. \quad (1.72)$$

至此, 我们已经将全微分推广到了 $C^\infty(M, T^*M)$ 上.

大家请注意: 由于 $e_i \wedge e_i = 0$, $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, 所以 $\Lambda^2 V$ 的基为 $\{e_i \wedge e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$, $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^2 V = \frac{n(n-1)}{2}$.

自然地, 我们会问, ds 的家在哪里? 也就是说 ds 将 $C^\infty(M, T^*M)$ 空间映到了什么空间上?

类似于前面我们对向量场和全微分做过的事情，我们看一下坐标变换时会发生什么。将坐标卡 U_β 换为 U_α 时，对 $i < j$,

$$\begin{aligned}
 dx_\beta^i \wedge dx_\beta^j &= \Phi_k^i dx_\alpha^k \wedge \Phi_l^j dx_\alpha^l = \sum_{k \neq l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\
 &= \sum_{k < l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l + \sum_{l < k} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\
 &= \sum_{k < l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l + \sum_{k < l} \Phi_l^i \Phi_k^j dx_\alpha^l \wedge dx_\alpha^k \\
 &= \sum_{k < l} (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l. \quad (1.73)
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \sum_{i < j} a_{ij}^\beta dx_\beta^i \wedge dx_\beta^j &= \sum_{i < j} a_{ij}^\beta \left(\sum_{k < l} (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \right) \\
 &= \sum_{k < l} \left(\sum_{i < j} a_{ij}^\beta (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i) \right) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\
 &= \sum_{i < j} \left(\sum_{k < l} a_{kl}^\beta (\Phi_i^k \Phi_j^l - \Phi_i^l \Phi_j^k) \right) dx_\alpha^i \wedge dx_\alpha^j. \quad (1.74)
 \end{aligned}$$

定义 1.3.4. 定义 $\sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}})$ 上的等价关系 ‘ $\sim$ ’ 为

$$\begin{aligned}
 (x, \{a_{ij}^\alpha, 1 \leq i < j \leq n\}) &\sim (y, \{a_{ij}^\beta, 1 \leq i < j \leq n\}) \\
 &\Leftrightarrow x = y, \text{ 且 } a_{ij}^\alpha = \sum_{k < l} a_{kl}^\beta (\Phi_i^k \Phi_j^l - \Phi_i^l \Phi_j^k). \quad (1.75)
 \end{aligned}$$

记 $\Lambda^2 T^*M := \sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}) / \sim$.

到这里 ds 的象空间就构造完成了，

$$ds \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M).$$

问题：我们是否可以对 $C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$ 中的元素继续做微分？

我们需要定义 k 个向量的外积。也就是说，定义 $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$, $v_1, \dots, v_k \in V$.

我们希望外积满足分配律，即

$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w).$$

我们还知道 $w \wedge v = -v \wedge w$, 也就是说交换向量的位置, 外积的结果要加一个负号, 自然的一个想法是:

$$u \wedge v \wedge w = -v \wedge u \wedge w = -u \wedge w \wedge v = w \wedge u \wedge v.$$

设 S_n 为 n 阶置换阵, 对 $\sigma \in S_n$, 定义 $\text{sgn}(\sigma)$,

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 为偶置换,} \\ -1, & \sigma \text{ 为奇置换.} \end{cases} \quad (1.76)$$

定义三个向量的外积:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 &:= \frac{1}{|S_3|} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes v_{\sigma(3)}, \quad v_i \in V \\ &= \frac{1}{6} (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1). \end{aligned} \quad (1.77)$$

自然推广到 k 个向量的外积:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}. \quad (1.78)$$

k 次外积张成的空间

$$\Lambda^k V := \{a^{i_1 i_2 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid a^{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \mathbb{R}\}. \quad (1.79)$$

注:

- $\Lambda^k V$ 的定义不依赖于基的选取;
- 对 $\forall v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$, 都有 $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k V$;
- $k > n$ 时, $\Lambda^k V = 0$;
- $\Lambda^k V$ 的一组基为 $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$; 也就是说 $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k V = C_n^k$, 特别地, $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n V = 1$.

对 $\xi \in \Lambda^k V, \eta \in \Lambda^l V$, ξ 与 η 的外积满足 $\xi \wedge \eta \in \Lambda^{k+l} V$, 对 $\forall \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k V, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l V, \zeta \in \Lambda^s V$, 以下性质成立:

1. 分配律: $(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta, \xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2$;
2. 反交换律: $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$;
3. 结合律: $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

定义 1.3.5 (外代数). 令 $\Lambda^*V := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V$, 特别地, $\Lambda^0 V := \mathbb{F}$, $\Lambda^1 V := V$. 则外积 $\wedge$ 定义了 Λ^*V 的一个代数结构, 称为外代数.

定义 1.3.6 (张量代数). 先定义 $T^r V := V \otimes \cdots \otimes V$, 特别地, $T^0(V) = \mathbb{F}$, $T^1(V) = V$. 则 $T(V) = \bigoplus_{r=0}^n T^r V$ 也是一个代数, 称为张量代数.

仿照 $d : C^\infty(M, T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$, 我们可以定义 $\Lambda^3 T^*M$, 直到 $\Lambda^n T^*M$, 从而定义 $d : C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{k+1} T^*M)$.

定义 1.3.7 (外微分). 简记 $\Omega^k(M) := C^\infty(M, \Lambda^k T^*M)$, 对 $\alpha \in \Omega^k(M)$, 局部上 $\alpha = a_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, 我们定义外微分 $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

$$d\alpha := \left(\frac{\partial a_{i_1 i_2 \cdots i_k}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad (1.80)$$

其中 d 称为外微分¹⁰ (exterior differential), α 称为微分形式 (differential form).

习题 1.3.8. $\Lambda^n T^*M$ 的转移函数恰为 T^*M 的转移矩阵的行列式, 即

$$dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \det \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(x)) \right)_{(k,l)} \cdot dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n. \quad (1.81)$$

回忆: 若一流形 $M = \mathbb{R}^3$ 为三维欧式空间, 现有光滑函数 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 可看做 $\mathbb{R}^3$ 上的 0-形式, 其 1-形式为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),$$

或者 $S \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $S = A dx + B dy + C dz$, $A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 继续做外微分 d , 得到其 2-形式为

$$ds = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

⁹对 $k \geq 2$, 依照粘接方法定义过于复杂, 我们在节后注记中给出, 在后续课程中我们会学到从另一个角度得到的更加形式化的定义。

¹⁰(1.80) 定义的合理性将在后续课程中用其它方式得到。

标准的 2-形式为

$$S = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy, A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^3),$$

继续用外微分得到 3-形式

$$dS = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

在场论中, 有一些标准记号. 梯度

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

这样一来, df 便为 $\text{grad } f$ 与 (dx, dy, dz) 的内积. 若 $X = (A, B, C)$, 则旋度为

$$\text{curl } X = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right).$$

$S \in \Omega^2(M)$, 那么 S 便为 $\text{curl } X$ 与 $(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ 的内积. 散度

$$\text{div } X = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

那么 3-形式 $dS = \text{div } X \cdot dx \wedge dy \wedge dz$.

场论中有两个重要的公式: $\text{curl}(\text{grad } f) = 0$ 与 $\text{div}(\text{curl } X) = 0$, 分别由 $d^2 f = 0$ 与 $d^2 S = 0$ 得到.

命题 1.3.9. 如下定义的映射 $TM \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left\langle x = a^k \frac{\partial}{\partial x_k}, s = b_l dx^l \right\rangle := \sum_{k=1}^n a^k b_k. \quad (1.82)$$

是合理, 双线性且非退化的. 这里的非退化是指: 1, 若对 $\forall s \neq 0$, 都有 $\langle x, s \rangle = 0$, 则 $x = 0$; 2, 若对 $\forall x \neq 0$, 都有 $\langle x, s \rangle = 0$, 则 $s = 0$.

证明. 双线性非退化性是显然的. 我们只需证明该映射的定义不依赖于坐标卡的选取:

$$\left\langle a_\beta^k \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}, b_l^\beta dx_\beta^l \right\rangle = a_\beta^k b_k^\beta = a_\alpha^s \Phi_s^k b_l^\alpha \tilde{\Phi}_k^l = a_\alpha^s b_l^\alpha \delta_s^l = \left\langle a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}, b_l^\alpha dx_\alpha^l \right\rangle. \quad (1.83)$$

□

由于这个性质, T^*M 又叫 TM 的对偶丛.

设 V, W 为向量空间, 那么

$$(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*. \quad (1.84)$$

证明. 对 $\forall v, v' \in V, w, w' \in W$, 定义 $v^* \otimes w^*(v' \otimes w') = v^*(v') \cdot w^*(w') \in \mathbb{F}$, 则 $v^* \otimes w^*$ 为 $V \otimes W$ 在对偶空间中, 即 $v^* \otimes w^* \in (V \otimes W)^*$, 从而 $V^* \otimes W^* \subset (V \otimes W)^*$. 由 $V^* \otimes W^*$ 与 $(V \otimes W)^*$ 的维数相等, 得到 $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$. $\square$

由式 (1.84), 可以进一步探索外微分和向量场之间的作用. 对一个 k -形式 $\alpha \in \Omega^k(M)$, 与向量场 $X_1, X_2, \dots, X_k$, 可定义

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) \in \mathbb{R},$$

定义的具体形式, 请同学自行写出.

对两个 k -形式 $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, 若对 $\forall X_1, X_2, \dots, X_k$, 有 $\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \beta(X_1, X_2, \dots, X_k)$, 由定义, 显然有 $\alpha = \beta$, 故整体上可用 α 在向量场上的值来研究微分形式.

命题 1.3.10. 1. 对 $\forall \alpha \in \Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$, 有 $d^2\alpha = 0$;

2. 对 $\forall \varphi \in C^\infty(M)$, 有 $\langle d\varphi, U \rangle = U(\varphi)$;

3. 对 $\forall \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^l(M)$, 有 $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

证明. (1) 首先证明 $\alpha \in \Omega^0(M)$, 也即光滑函数时的情况, 对 $f \in C^\infty(M)$, $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$,

$$\begin{aligned} d(df) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\ &= 0. \end{aligned}$$

若 $\alpha \in \Omega^k(M)$, 由式 (1.80),

$$d^2\alpha := d^2(a_{i_1 i_2 \dots i_k}) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

$$(2) \langle d\varphi, u \rangle = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx^i, U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle = U^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = U(\varphi).$$

(3) 假设 $\alpha = \alpha_I dx^I$, $\beta = \beta_J dx^J$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$, 则有

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \beta_J d\alpha_I \wedge dx^I \wedge dx^J + \alpha_I d\beta_J \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (d\alpha_I \wedge dx^I) \wedge \beta_J dx^J + (-1)^k \alpha_I dx^I \wedge d\beta_J \wedge dx^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

注记¹¹: 我们用 Einstein 求和符号将 (1.74) 式推广到 r -次外形式。由 $dx_\beta^k = \Phi_l^k dx_\alpha^l$, 对 $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, 有

$$\begin{aligned} dx_\beta^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_\beta^{i_r} &= \Phi_{j_1}^{i_1} \dots \Phi_{j_r}^{i_r} dx_\alpha^{j_1} \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{j_r} \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} \left(\sum_{\tau \in S_r} \text{sgn}(\tau) \Phi_{k_{\tau(1)}}^{i_1} \dots \Phi_{k_{\tau(r)}}^{i_r} \right) dx_\alpha^{k_1} \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{k_r} \quad (1.85) \end{aligned}$$

所以, 若

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r}^\beta dx_\beta^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_\beta^{i_r} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r}^\alpha dx_\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{i_r}, \quad (1.86)$$

交换指标 $(i_1, \dots, i_r) \leftrightarrow (k_1, \dots, k_r)$, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r}^\beta dx_\beta^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_\beta^{i_r} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r}^\beta \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} \left(\sum_{\tau \in S_r} \text{sgn}(\tau) \Phi_{k_{\tau(1)}}^{i_1} \dots \Phi_{k_{\tau(r)}}^{i_r} \right) dx_\alpha^{k_1} \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{k_r} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} a_{k_1 \dots k_r}^\beta \left(\sum_{\tau \in S_r} \text{sgn}(\tau) \Phi_{i_{\tau(1)}}^{k_1} \dots \Phi_{i_{\tau(r)}}^{k_r} \right) \right) dx_\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{i_r}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

¹¹这部分我们不做考察

所以,

$$a_{i_1 \dots i_r}^\alpha = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} a_{k_1 \dots k_r}^\beta \left(\sum_{\tau \in S_r} \text{sgn}(\tau) \Phi_{i_{\tau(1)}}^{k_1} \dots \Phi_{i_{\tau(r)}}^{k_r} \right). \quad (1.88)$$

定义 1.3.11. 定义 $\sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^{C_n^r})$ 上的等价关系 ‘ $\sim$ ’ 为

$$(x, \{a_{i_1 \dots i_r}^\alpha, 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}) \sim (y, \{a_{j_1 \dots j_r}^\alpha, 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\}) \quad (1.89)$$

当且仅当 $x = y$ 且满足 (1.88) 式。记 $\Lambda^r T^*M := \sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^{C_n^k}) / \sim$.